XII TALLER DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CÁLCULO
Solicitud de admisión

20 de abril de 2015

Es indispensable que contestes a cada pregunta y que intentes todos los problemas. En cada problema explica detalladamente las ideas que tienes para atacarlo, aún si eres incapaz de resolverlo por completo.

Es necesario que hagas los problemas en forma **independiente** (aunque puedes consultar libros). Si notamos que hay dos solicitudes copiadas o resueltas en equipo, tendremos que anularlas.

Anexa cualquier comentario que consideres pertinente.

METODO Y FECHA DE ENTREGA: Toda tu solicitud debe quedar contenida en un solo archivo pdf (no se aceptarán solicitudes en ningún otro formato, como por ejemplo Word o jpg). Este archivo deberás subirlo usando el botón que se encuentra en esta página (el que dice"Subir solicitud en línea").

La fecha límite de entrega es el **domingo 7 de junio** (cualquier hora).

Si tienes problemas con el funcionamiento de la página, o para cualquier duda relativa al Taller, puedes escribir a lamoneda@cimat.mx.

A. Datos personales y estudios

1. Tu nombre.
2. Tu edad.
3. Tu dirección electrónica (¡escríbela con letra de molde y lo más legible que puedas!)
4. La carrera que cursas y el nombre de la escuela donde la estudias.
5. Semestre que estás cursando (o acabas de concluir).
6. Menciona algún resultado o ejemplo de tu curso de cálculo, que te haya gustado. Explica por qué te gusta.

7. ¿Qué te interesa o llama la atención de este Taller?
8. Indica el nombre y correo electrónico de un profesor que te conozca bien.

B. Los problemas

En cada inciso trata de dar respuestas rigurosas y lo más completas que puedas. Aún si no logras sacarlo, explica que ideas se te ocurren para resolverlo. Si no puedes resolver algún inciso, sigue adelante con los demás.

Si f es una función C^∞, el polinomio de Taylor de f, en el punto a, de grado n se define como

$$p_a(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j$$

donde $f^{(j)}(a)$ denota la j-ésima derivada de f en a.

1. Si $g(x) = e^x$, calcula $p_a(x)$ de grado n.
2. Prueba que la gráfica de $g(x)$ y la de $p_a(x)$ se intersectan en $x = a$. Más aún, prueba que la gráfica de $p_a(x)$ cruza a la de $g(x)$ (esto es, queda arriba para $x < a$ y por debajo, para $x > a$). Prueba, adems, que en ese punto, ambas gráficas son tangentes. Si no te sale en general, al menos pruébalo para $n = 2$.
3. Para $n = 2$, grafica $g(x)$ y $p_a(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$, para los valores de $a = -2 + j/5$, $j : 0, ..., 20$ (esto es, hay que graficar $p_a(x)$ para al menos 20 valores distintos de a, igualmente distribuidos sobre el intervalo $[-2, 2]$). En otras palabras, debes tener en el mismo dibujo la gráfica de g y las 20 gráficas de los $p_a(x)$ ¡NO HAGAS ESTO A MANO! Usa cualquier programa para graficar (eg Mathematica, Maple, un programa en C que tú hagas, etc). Asegúrate de que la gráfica de g sea visible entre todas las otras.
4. Demuestra que si $n \geq 2$ es **par**, entonces las gráficas de $p_a(x)$ y $p_b(x)$ no se intersectan, siempre que $a \neq b$. Si no puedes probarlo en general, al menos hazlo para $n = 2$. En tu dibujo de arriba, esto debería verse claramente.
5. Demuestra lo siguiente: Sea f una función C^∞ tal que la gráfica de f es tangente en cada punto a una línea horizontal. Entonces, la gráfica de f es una línea horizontal.
6. Los incisos 2 y 4 muestran que la gráfica de g es tangente en cada punto a una curva de una familia infinita de curvas que no se intersectan. Sin embargo, la gráfica de g cruza a todas ellas. ¿Por qué esto no contradice al inciso 5? Mejor dicho, ¿por qué no podemos probar algo como el inciso 5 para la gráfica de g y las gráficas disjuntas de las $p_a(x)$? Discute.